2. Konstrukce trojúhelníků, čtyřúhelníků metodou množin bodů dané vlastnosti

KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

- POLOHOVÉ: určeno umístění některého z daných prvků (např. je dána úsečka AA_1) – MUSÍME TÍMTO PRVKEM ZAČÍT!
- NEPOLOHOVÉ: sami si zvolíme umístění některého z daných prvků, čímž úlohu převedeme na polohovou, řešení závisí na výběru prvku

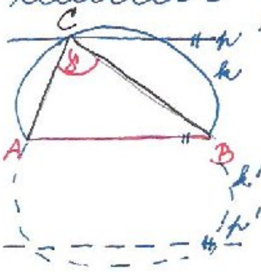
KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKŮ

- zpravidla zadány 3 prvky (strany, úhly, těžnice, výšky, poloměr kružnice opsané nebo vepsané)

Příklady

① Je dána úsečka AB, $|AB| = 4\,cm$. Sestrojte všechny $\triangle ABC$, kde $|\sphericalangle C| = \gamma = \frac{\pi}{3}$, $v_c = 3\,cm$.

1. Náčrt a rozbor



POLOHOVÁ – začít úsečkou AB (známe tedy již 2 body $\triangle$)

M. b. $C \in p \cup p'$ $\quad p \parallel c,\ p' \parallel c$ ve vzd. v_c

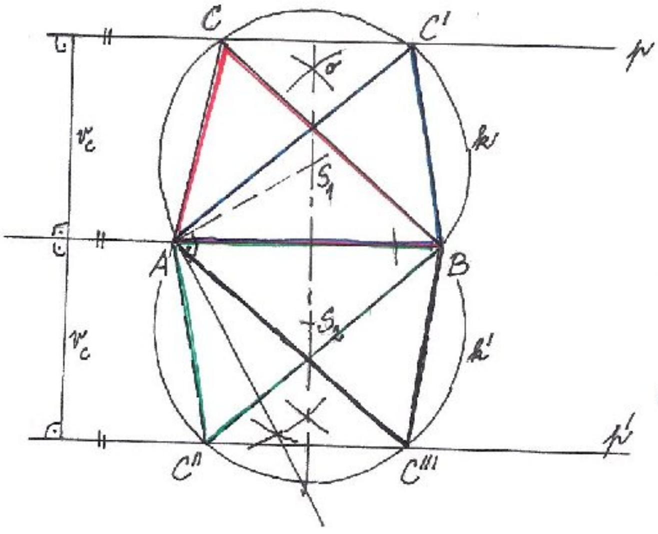
$[$nebo $|p \leftrightarrow AB| = |p' \leftrightarrow AB| = v_c]$

$[$nebo $C \in m_1 \quad m_1 = p \cup p' = \{X \in \rho;\ |X \leftrightarrow AB| = v_c\}]$

$C \in k \cup k' \quad k \cup k' = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = 60°\}$

$[$nebo $C \in m_2 \quad m_2 = k \cup k' = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = 60°\}]$

$C \in m_1 \cap m_2$ nebo $C \in (p \cup p') \cap (k \cup k')$



2. Konstrukce a zápis

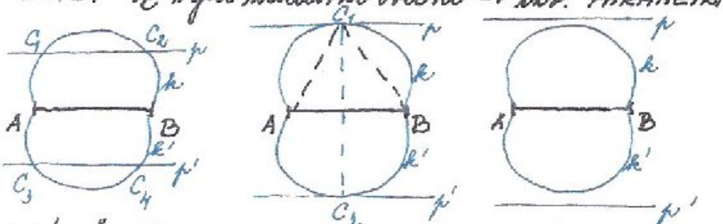
1. $AB;\ |AB| = 4\,cm$
2. $p, p';\ |p \leftrightarrow AB| = |p' \leftrightarrow AB| = v_c$
3. $k, k';\ k \cup k' = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = 60°\}$
4. $C;\ C \in (k \cup k') \cap (p \cup p')$
5. $\triangle ABC$

3. Zkouška (kontrola) a počet řešení

- podle zadání přeměřit
- počet řešení: 4

POZNÁMKA: někdy uvažujeme řešení jen v jedné polorovině určené hraniční přímkou AB ⇒ 2 řešení a v zápisu neuvažujeme p', k' (jednodušší)

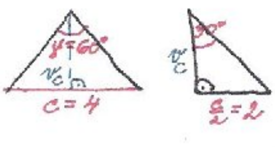
- KDYBY v_c byla zadána obecně ⇒ tzv. PARAMETRICKÁ ÚLOHA ⇒ nutná DISKUZE



p, p' sečnou – 4 řešení: $v < 2\sqrt{3}$

p, p' tečny – 2 řešení: $v = 2\sqrt{3}$

p, p' vnější přímky – 0 řešení: $v > 2\sqrt{3}$



$$\operatorname{tg} 30° = \frac{2}{v_c}$$

$$v_c \operatorname{tg} 30° = 2$$

$$v_c = \frac{2}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

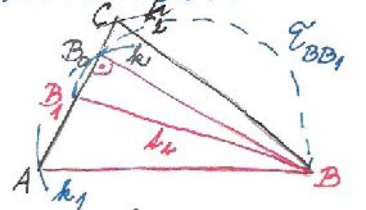
$$v_c = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$v_c = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

← odvození podmínky pro v

② Dána úsečka BB_1, $|BB_1| = 6$ cm. Sestrojte všechny △ABC, kde $BB_1 = s_b$, $v_b = 5$ cm, $c = 5{,}5$ cm.

1. Rozbor a náčrt



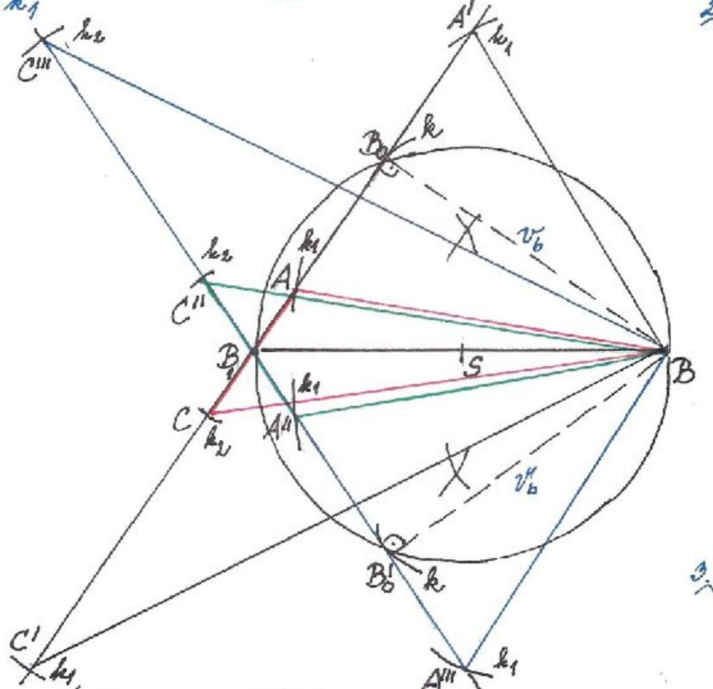
začít BB_1

=> R△ B_1BB_0

hl. b. $B_0 \in \tau_{BB_1} \cap k(B, v_b)$

hl. b. $A \in \leftrightarrow B_0B_1 \cap k_1(B, c)$

hl. b. $C \in \leftrightarrow B_0B_1 \cap k_2(B_1, |AB_1|$ B_1 střed AC



2. Konstrukce a zápis

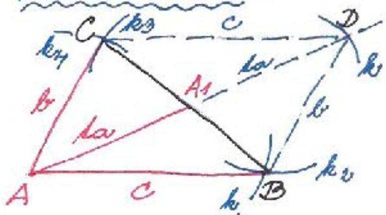
1. BB_1; $|BB_1| = 6$ cm
2. τ_{BB_1}; $\tau(S, \frac{1}{2}BB_1)$ S střed BB_1
3. k; $k(B; v_b = 5$ cm$)$
4. B_0; $B_0 \in k \cap \tau$
5. $\leftrightarrow B_1B_0$
6. k_1; $k_1(B; c = 5{,}5$ cm$)$
7. A; $A \in k_1 \cap \leftrightarrow B_1B_0$
8. k_2; $k_2(B_1, |AB_1|)$
9. C; $C \in k_2 \cap \leftrightarrow B_0B$
10. △ABC

3. Kontrola a počet řešení

– 4 řešení

③ Dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 4$ cm. Sestrojte △ABC, kde $s_a = AA_1$, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.

1. Náčrt a rozbor



začít AA_1 => doplníme na rovnoběžník ABDC

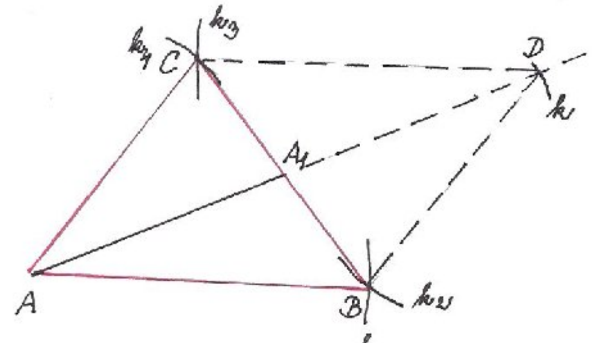
=> sestrojíme △ABD (sss)

AA_1

hl. b. $D \in \mapsto AA_1 \cap k(A_1, |AA_1|)$

hl. b. $B \in k_1(A, c) \cap k_2(D, b)$

hl. b. $C \in k_3(D, c) \cap k_4(A, b)$



3. Zápis a konstrukce

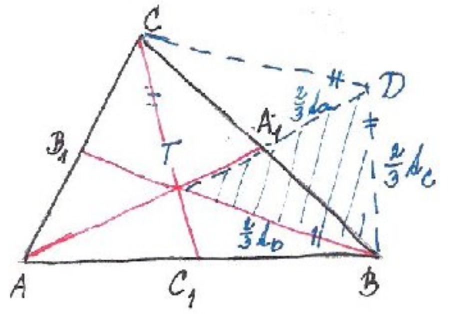
1. AA_1; $|AA_1| = 4$ cm
2. $\mapsto AA_1$
3. k; $k(A_1, |AA_1| = 4$ cm$)$
4. D; $D \in \mapsto AA_1 \cap k$
5. k_1; $k_1(A, c = 5$ cm$)$
6. k_2; $k_2(D, b = 4$ cm$)$
7. B; $B \in k_1 \cap k_2$
8. k_3; $k_3(D, c = 5$ cm$)$
9. k_4; $k_4(A, b = 4$ cm$)$
10. C; $C \in k_3 \cap k_4$
11. △ABC

LZE UŽÍT I GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ – STŘEDOVOU SOUMĚRNOST, POSUNUTÍ

4. Kontrola a počet řešení

1 řešení

④ Sestrojte $\triangle ABC$, známe-li t_a, t_b, t_c



TBDC rovnoběžník

sestr. $\triangle TBD$ (sss) $|TB| = \frac{2}{3}t_b$ $|BD| = \frac{2}{3}t_c$ $|TD| = \frac{2}{3}t_a$

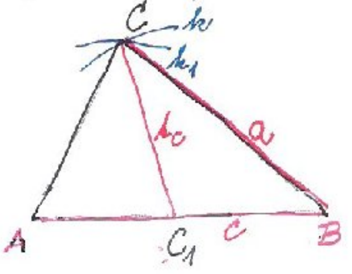
$\Rightarrow$ hl.b. $A \in \mapsto A_1T \cap k(A_1, t_a)$ A_1 střed TD

hl.b. $C \in k_1(C_1, t_c) \cap p$ $p \parallel \leftrightarrow TB$ bodem D
C_1 střed AB

[nebo $C \in \mapsto BA_1 \cap k_1(A_1, |BA_1|)$ nebo i jinak]

⑤ Je dána úsečka AB, $|AB| = 6$ cm. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li

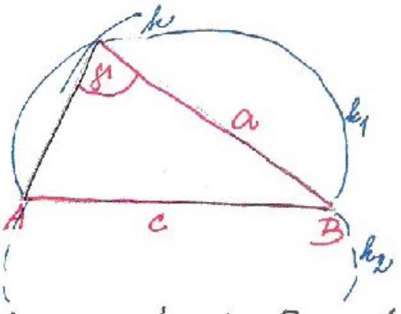
a) $c = |AB|$, $a = 5$ cm, $t_c = 5$ cm



$|AB| = c$

hl.b. $C \in k(B, a) \cap k_1(C_1, t_c)$ C_1 střed AB

b) $c = |AB|$, $\gamma = 60°$, $a = 5$ cm



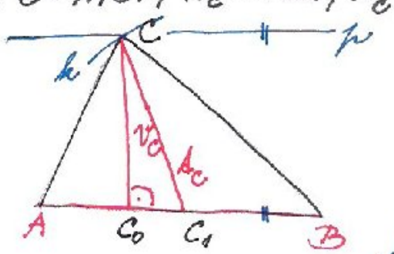
začít AB

$|AB| = c$

hl.b. $C \in k(B, a)$

$C \in k_1 \cup k_2$ $k_1 \cup k_2 = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = 60°\}$

c) $c = |AB|$, $v_c = 5$ cm, $t_c = 5{,}5$ cm



začít AB

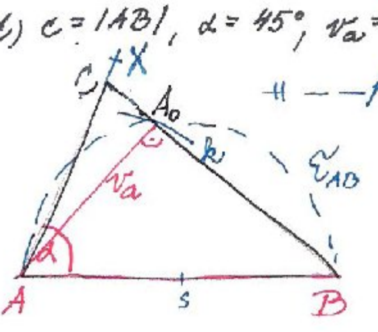
$|AB|$

hl.b. $C \in k(C_1, t_c)$ C_1 střed úsečky AB

$C \in p \cup p'$ $|p \leftrightarrow AB| = |p' \leftrightarrow AB| = v_c$

p' patří k c)

d) $c = |AB|$, $\alpha = 45°$, $v_a = 5{,}5$ cm



$|AB|$

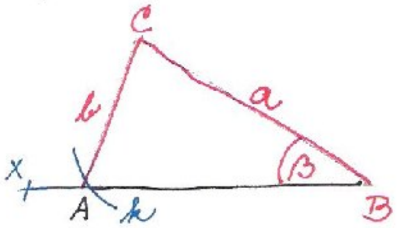
vyjdeme z $R\triangle ABA_0$

hl.b. $A_0 \in \tau_{AB} \cap k(A, v_a)$

hl.b. $C \in \mapsto BA_0 \cap \mapsto AX$ $|\sphericalangle BAX| = \alpha$

⑥ Je dána úsečka BC, $|BC| = 5\,cm$. Sestrojte všechny $\triangle ABC$, je-li

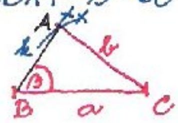
a) $a = |BC| = 5\,cm$, $\beta = 60°$, $b = 6{,}5\,cm$.



$|BC|$

hl. b. $A \in \mapsto BX \cap k(C; b)$

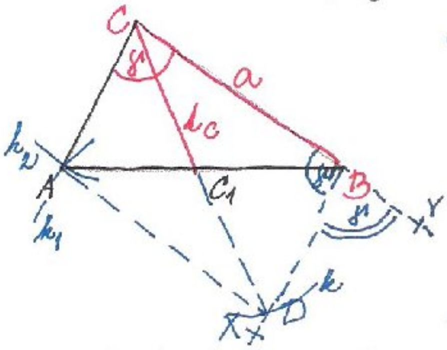
$|\sphericalangle CBX| = \beta = 60°$



Zápis konstrukce

1. BC; $|BC| = 5\,cm$
2. $\sphericalangle CBX$; $|\sphericalangle CBX| = 60°$
3. k; $k(C, b = 6{,}5\,cm)$
4. $A \in k \cap \mapsto BX$
5. $\triangle ABC$

b) $a = |BC|$, $\gamma' = 60°$, $t_c = 5{,}5\,cm$



doplníme na rovnoběžník $ADBC$
=> sestr. $\triangle BCD$

$|BC|$

hl. b. $D \in \mapsto BX$, $|\sphericalangle CBX| = 180° - \gamma = 120°$ (γ'')

tzv $|\sphericalangle CBY| = \gamma = 60°$

$D \in k(C; 2t_c)$

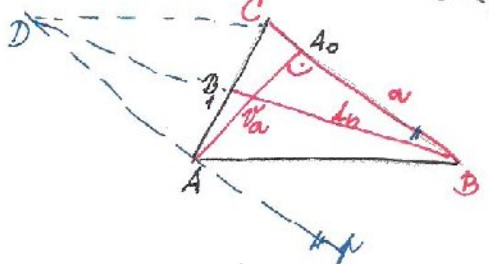
$D \in \mapsto BX \cap k$

hl. b. $A \in k_1(D, a) \cap k_2(C, |BD|)$

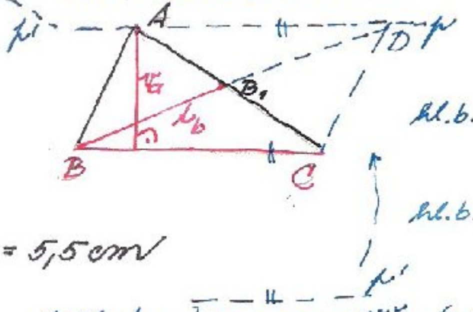
Zápis konstrukce:

1. BC; $|BC| = 5\,cm$
2. $\sphericalangle XBY$; $|\sphericalangle CBY| = 60°$
   [nebo $\sphericalangle CBX$; $|\sphericalangle CBX| = 120°$]
3. k; $k(C; 2t_c)$
4. D; $D \in k \cap \mapsto BX$
5. k_1; $k_1(D, a)$
6. k_2; $k_2(C; |BD|)$
7. $A \in k_1 \cap k_2$
8. $\triangle ABC$

c) $a = |BC|$, $v_a = 3\,cm$, $t_b = 5\,cm$



NĚKDY VHODNÉ △ OZN. JINAK



doplníme na rovnob. $BCDA$

BC

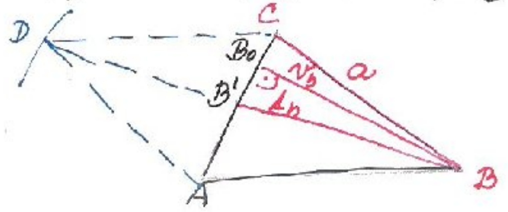
hl. b. $D \in k(B; 2t_b) \cap (p \cup p')$

p, p' ve vzd. v_a od $\leftrightarrow BC$

$(|p \leftrightarrow BC| = |p' \leftrightarrow BC|)$

hl. b. $A \in p \cap k_1(D; |BC|)$

d) $a = |BC|$, $v_b = 4{,}5\,cm$, $t_c = 5{,}5\,cm$



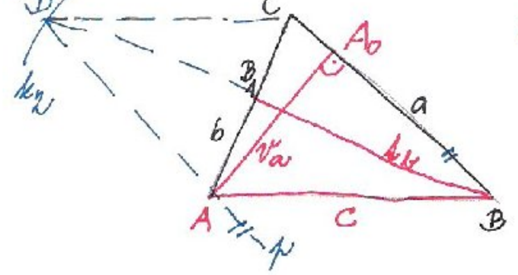
doplníme na rovnoběžník $ABCD$

$|BC|$

hl. b. $D \in k_1(B; 2t_b)$

⑦ Dána úsečka AA_0, $|AA_0| = 4\,cm$. Sestrojte všechny $\triangle ABC$, je-li

a) $v_a = |AA_0| = 4\,cm$, $c = 5\,cm$, $t_b = 6\,cm$



R $\triangle ABA_0$

AA_0

$B \in k \cap k_1(A, c)$ $k \perp AA_0$ bodem A_0

doplň. na rovnob.

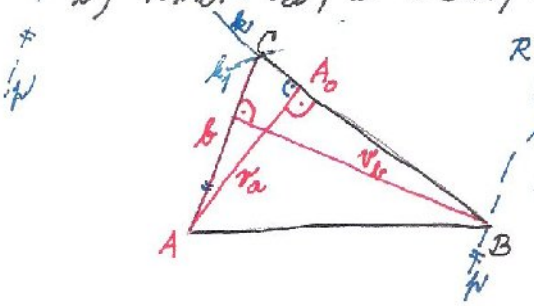
$D \in k_2(B, 2t_b) \cap p$ $p \parallel BA_0$ bodem A

$C \in \mapsto BA_0 \cap k_3(D, |AB|)$

[nebo $C \in \mapsto BA_0 \cap p_1$ $p_1 \parallel AB$ bodem D]

[pokr. př. ⑦ – dána úsečka $|AA_0| = 4\,cm$]

b) $|AA_0| = v_a$, $b = 6\,cm$, $v_b = 1{,}5\,cm$



$R\,\triangle ACA_0$

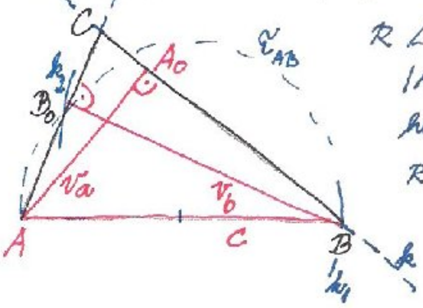
$|AA_0|$

hl. b. $C \in k_1(A, b) \cap k$ $k \perp AA_0$ bodem A_0 (kolmice)

hl. b. $B \in (p \cup p') \cap \mapsto CA_0$ $p \parallel AC \parallel p'$ p, p' ve vzd. v_b od AC

$(|p \leftrightarrow AC| = |p' \leftrightarrow AC| = v_b)$

c) $|AA_0| = v_a$, $c = 6\,cm$, $v_b = 4{,}5\,cm$



$R\,\triangle ABA_0$

$|AA_0|$

hl. b. $B \in k \cap k_1(A, c)$ (k… kolmice k AA_0 bodem A_0)

$k \perp AA_0$ bodem A_0

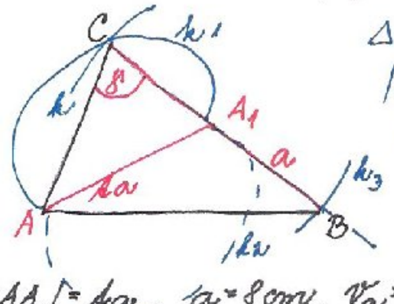
$R\,\triangle ABB_0$

hl. b. $B_0 \in \tau_{AB} \cap k_2(B; v_b)$

hl. b. $C \in \mapsto AB_0 \cap \mapsto BA_0$

⑧ Dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 6\,cm$. Sestrojte všechny $\triangle ABC$, je-li

a) $|AA_1| = t_a$, $a = 5\,cm$, $\beta = 60°$



$\triangle AA_1C$

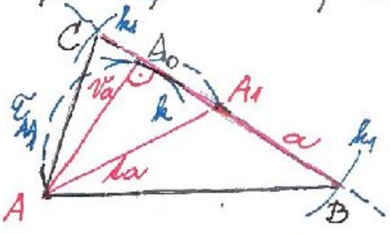
$|AA_1|$

$C \in (k_1 \cup k_2) \cap k(A_1, \frac{1}{2}a)$

$k_1 \cup k_2 = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXA_1| = \beta = 60°\}$

$B \in \mapsto CA_1 \cap k_3(A_1, \frac{1}{2}a)$ $[k_3 = k]$

b) $|AA_1| = t_a$, $a = 8\,cm$, $v_a = 5\,cm$



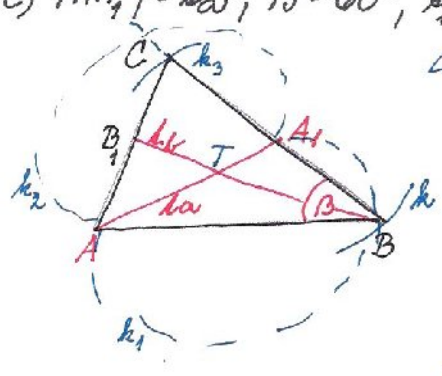
$R\,\triangle AA_1A_0$ začneme AA_1

$A_0 \in \tau_{AA_1} \cap k(A, v_a)$

$C \in k_1(A_1, \frac{1}{2}a) \cap \mapsto A_1A_0$

$B \in k_1(A_1, \frac{1}{2}a) \cap \mapsto A_0A_1$

c) $|AA_1| = t_a$, $\beta = 60°$, $t_b = 4{,}5\,cm$



$\triangle AA_1B$

AA_1

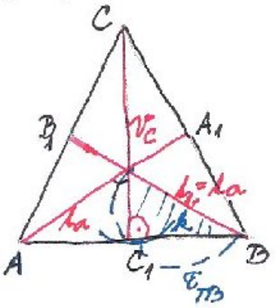
$B \in (k_1 \cup k_2) \cap k(T, \frac{2}{3}t_b)$ T těžiště $|AT| = \frac{2}{3}t_a$

$k_1 \cup k_2 = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle ABA_1| = \beta\}$

$C \in \mapsto BA_1 \cap k_3(A_1, |A_1B|$

[nebo
$B_1 \in \mapsto BT \cap k_3(B; t_b)$
$C \in \mapsto BA_1 \cap \mapsto AB_1$]

⑨ Sestroj rovnoramenný Δ ABC (AB základna), je-li $v_c = 6$ cm, $t_a = 4,5$ cm.



NEPOLOHOVÁ ÚLOHA (lze začít jak chceme => už polohová)

uvědom si, že $t_a = t_b$ $t_c = v_c$ T těžiště

lze začít např. R Δ BTC_1

$|BT| = \frac{2}{3}|BB_1| = \frac{2}{3} t_a = 3$ cm

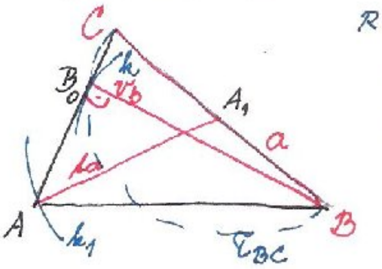
$C_1 \in \tau_{TB} \cap k(T, \frac{1}{3} v_c)$

$A \in \mapsto BC_1 \cap k_1(C_1, |C_1B|)$ [nebo $A \in \mapsto BC_1 \cap k_1(T, \frac{2}{3} t_a)$!]

$C \in \mapsto C_1T \cap k_2(C_1, v_c)$

⑩ Δ ABC : $a = 9$ cm, $v_b = 4,5$ cm, $t_a = 2,5$ cm. Řešte umístěním

a) BC; $|BC| = a$



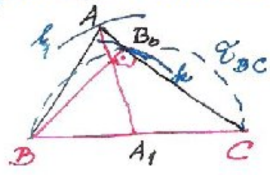
R Δ BCB_0

$B_0 \in \tau_{BC} \cap k(B, v_b)$

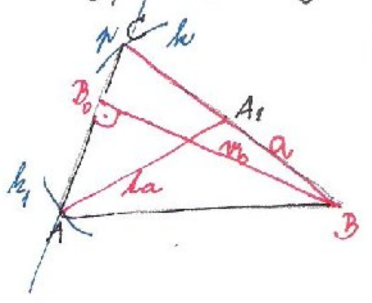
$A \in k_1(A_1, t_a) \cap \mapsto CB_0$

A_1 střed BC

nevidíš-li řešení => označ si jinak (nebo hoď sítěm)



b) BB_0, $|BB_0| = v_b$



R Δ CBB_0

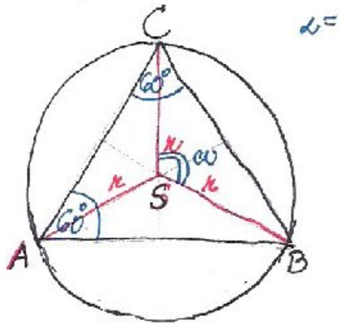
BB_0

$C \in p \cap k(B, a)$

$p \perp B_0B$ bodem B_0

$A \in k_1(A_1, t_a) \cap \mapsto CB_0$

⑪ Sestroj rovnostranný Δ ABC, je-li poloměr kružnice opsané $r = 3$ cm.



$\alpha = 60° \Rightarrow \omega = 120°$

vhodně začít $k(S, r = 3$ cm$)$

=> bod A, tj. umístěním AS

tj. b. $C \in k(S, r) \cap \mapsto SX$ $|\sphericalangle ASX| = 120°$

$B \in k(S, r) \cap \mapsto SY$ $|\sphericalangle ASY| = 120°$